ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.1 No.2 Juli 2005 : 87-89

Pembentukkan Dan Sifat-Sifat Lattice Kongruen Pada Semigrup

Zulfia Memi Mayasari

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 26 Februari 2005; direvisi 16 Maret 2005; disetujui 10 Juni 2005

Abstrak - Misalkan $(S,\circ)$ semigrup dan α relasi ekuivalen pada S. Relasi ekuivalen α pada semigrup S dikatakan kongruen jika $(\forall s,t,a \in S)$ dan s α t maka sa α ta dan as α at. Jika semua kongruen pada S dihimpun dan dinotasikan dengan K(S) kemudian pada K(S) diberikan dua operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ maka (K(S); $\vee$, $\wedge$) membentuk lattice, yang disebut lattice kongruen pada semigrup. Dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik operasi biner $\vee$ dan $\wedge$, sehingga (K(S); $\vee$, $\wedge$), membentuk lattice serta sifat-sifat lattice kongruen pada semigrup.

Kata kunci: **Kongruen; Lattice; Lattice Kongruen.**

1. Pendahuluan

Suatu relasi ekuivalen α pada semigrup S disebut kongruen jika memenuhi sifat kompatibel, yaitu $(\forall s,t,a \in S)$ ($s\ \alpha\ t \Rightarrow sa\ \alpha\ ta$ dan $as\ \alpha\ at$). Semua kongruen pada semigrup S dihimpun dan dinotasikan dengan K(S), yaitu K(S) = {α | α kongruen pada semigrup S}. Jika pada K(S) diberikan dua operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ (join dan meet) dan kedua operasi ini memenuhi sifat assosiatif, komutatif, idempoten dan absorspsi, maka) (K(S); $\vee$, $\wedge$) merupakan lattice, dan disebut lattice kongruen pada semigrup S [1]. Berdasarkan pada sifat yang dimiliki semigrup dan lattice di atas dilakukan kajian lebih lanjut terhadap lattice kongruen pada semigrup. Suatu himpunan terurut parsial (L, $\leq$) dikatakan lattice jika terdapat sup(A) dan inf (A) untuk sebarang himpunan berhingga $A \subseteq L$ dengan $A \neq \varnothing$. [2].

Jika suatu lattice memenuhi $a \geq b \Rightarrow (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ untuk setiap *a, b, c* didalam lattice tersebut maka lattice tersebut dikatakan bersifat modular [1].
Tujuan dari tulisan ini adalah menentukan operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ pada K(S) sehingga (K(S); $\vee$, $\wedge$) merupakan lattice dan sifat-sifat apa yang dimiliki oleh (K(S); $\vee$, $\wedge$) dengan $\vee$ dan $\wedge$ yang telah ditentukan. Kajian yang dilaksanakan adalah mempelajari sifat-sifat relasi kongruen pada semigrup dan sifat-sifat lattice. Sebagai teori dasar adalah teori-teori dasar dari struktur semigrup, relasi kongruen dan teori lattice yang dikemukakan oleh [3], [2]. dan [4].

2. Karakteristik Lattice Kongruen Pada Semigrup

Misalkan R suatu relasi pada S, dan ρ_i, $i \in I$ relasi kongruen yang memuat R maka $\bigcap_{i \in I} \{\rho_i \mid i \in I\}$ juga kongruen pada S dan merupakan kongruen terkecil yang memuat R.

Definisi 1. [5]
$\bigcap_{i \in I} \{\rho_i \mid i \in I\}$ merupakan relasi kongruen yang dibangun oleh R dan dinotasikan dengan R^c

Teorema 2. [5]
Diberikan $(R^c)^e$ = relasi ekuivalen yang dibangun oleh R^c. Jika R relasi pada semigrup S maka R^s = $(R^c)^e$

Bukti:

(1). Ambil sebarang $s, t, a \in$ S dan $(s, t) \in (R^c)^e$. Tulis $\rho = (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c$. Dari $(s, t) \in (R^c)^e$ dan didefinisikan $R^e = (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^\infty$ diperoleh $(s, t) \in \rho^\infty$. Akibatnya terdapat n $\in$ N sehingga $(s, t) \in \rho^n$. Ambil sebarang $(x,y) \in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c$. Diperoleh $x = as1$, $y = at1$ untuk $a,1 \in S^1$ dan $(s, t) \in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)$. Akibatnya (as, at) $\in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c = \rho$. Dari $(x,y) \in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c$, diperoleh $x = 1sa$, $y = 1ta$ untuk $a,1 \in S^1$ dan $(s, t) \in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)$. Akibatnya $(sa, ta) \in (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c = \rho$. Jadi ρ kompatibel kiri dan kompatibel kanan akibatnya ρ^n kompatibel kiri dan kompatibel kanan. Jadi $(\forall a \in S)$ $(as, at) \in \rho^n \subseteq (R^c)^e$ dan $(sa, ta) \in \rho^n \subseteq (R^c)^e$. Terbukti $(R^c)^e$ merupakan kongruen pada S yang memuat R.

(2). Karena jelas berlaku $R \subseteq R^c$, dan k kongruen pada S yang memuat R diperoleh $R \subseteq R^c \subseteq k^c = k$. k merupakan relasi ekuivalen dan memuat R^c maka $(R^c)^e \subseteq k$. Terbukti $(R^c)^e$ merupakan kongruen terkecil yang memuat R, yaitu $(R^c)^e = R^s$. Karena $R^s = (R^c)^e$ terbukti $(R^c)^e$ merupakan kongruen terkecil yang memuat R.

Jika $\{\rho_i \mid i \in I\}$ adalah kongruen pada semigrup S, maka $\bigcap \{\rho_i \mid i \in I\}$ juga merupakan kongruen pada S. Jika R suatu relasi pada S maka interseksi dari semua kongruen pada S memuat R merupakan relasi kongruen yang terkecil disebut kongruen pada S yang dibangun oleh R dan ditulis R^s. Jadi $R^s = \bigcap \{\rho_i \mid i \in I, \rho_i$ kongruen pada S dan $R \subseteq \rho_i\}$ atau kongruen pada S yang dibangun oleh R, yaitu kongruen terkecil yang memuat R.

Teorema 3. [1]

Himpunan semua kongruen pada semigrup S merupakan lattice dengan definisi $\wedge$ dan $\vee$ sebagai $(\forall \rho, \sigma \in K(S))$ $(\rho \wedge \sigma) = (\rho \cap \sigma)$ dan $(\rho \vee \sigma) = (\rho \cup \sigma)^s$

Bukti:

Ambil sebarang $\rho, \sigma \in K(S)$. Definisikan $\rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \rho \cap \sigma = \rho$. Diperoleh $(K(S), \subseteq)$ himpunan terurut parsial, sebab:

(1). Jelas $\rho \subseteq \rho$ $(\forall \rho \in K(S))$, ($\subseteq$ refleksif)

(2). Ambil $\rho, \sigma \in K(S)$ dengan $\rho \subseteq \sigma$ dan $\sigma \subseteq \rho$, diperoleh $\rho \cap \sigma = \rho$ dan $\sigma \cap \rho = \sigma$. Karena $\rho, \sigma \in K(S)$. Karena $\rho \cap \sigma \in K(S)$. Jadi $(\forall s, t, a \in S)$ $(s, t) \in \rho \cap \sigma \Leftrightarrow (s, t) \in \sigma$ dan $(s, t) \in \rho \Leftrightarrow (s, t) \in \sigma \cap \rho$. Diperoleh $\rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho \Leftrightarrow \rho = \rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho = \sigma$. Terbukti jika $\rho \subseteq \sigma$ dan $\sigma \subseteq \rho$ maka $\rho = \sigma$ ($\subseteq$ anti simetris)

(3). Ambil ρ, σ dan $\beta \in K(S)$ dengan $\rho \subseteq \sigma$ dan $\sigma \subseteq \beta$, diperoleh $\rho \cap \beta = (\rho \cap \sigma) \cap \beta = \rho \cap (\sigma \cap \beta) = \rho \cap \sigma = \rho \Leftrightarrow \rho \subseteq \beta$. Terbukti jika $\rho \subseteq \sigma$ dan $\sigma \subseteq \beta$ maka $\rho \subseteq \beta$ ($\subseteq$ transitif)

Dari 1 – 3 terbukti $(K(S), \subseteq)$ merupakan himpunan terurut parsial. Jadi $(K(S), \subseteq)$ merupakan himpunan terurut parsial dengan supremum dan infimumnya ada untuk setiap dua elemen K(S), yaitu $(\forall \rho, \sigma \in K(S))$ $\inf(\rho, \sigma) = (\rho \cap \sigma)$ dan $\sup(\rho, \sigma) = (\rho \cup \sigma)^s$. Terbukti bahwa $(K(S);\vee, \wedge)$ merupakan lattice $\sup(\rho, \sigma) = (\rho \cup \sigma)^s$ dan $\inf(\rho, \sigma) = (\rho \cap \sigma)$.

Lemma 4. [5]

Misalkan ρ, σ relasi ekuivalen (kongruen) pada semigrup S. $(\forall a, b \in S)$ $(a, b) \in \rho \vee \sigma \Leftrightarrow$ untuk n $\in$ N $(\exists x_1, \ldots, x_{2n-1} \in S)$ sehingga $(a, x_1) \in \rho$, $(x_1, x_2) \in \sigma, \ldots, (x_{2n-1}) \in \sigma$

Bukti:

Teorema ini artinya sama dengan membuktikan $\rho \vee \sigma = (\rho \circ \sigma)^\infty$. Berdasarkan teorema 2, $(K(S); \vee, \wedge)$ merupakan lattice dengan $\sup(\rho, \sigma) = (\rho \cup \sigma)^s$ dan $\inf(\rho, \sigma) = (\rho \cap \sigma)$. Berdasarkan Teorema 1 dan karena himpunan semua ekuivalen pada semigrup S merupakan lattice dengan $\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^e$ serta ρ, σ kongruen didapat $(\rho \cup \sigma)^s = (\rho \cup \sigma)^e$. Mengingat R^e didefinisikan sebagai $(R \cup R^{-1} \cup 1_s)^\infty$ diperoleh $\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^\infty$. Akibatnya:

$$(\rho \circ \sigma)^\infty \subseteq (\rho \cup \sigma)^\infty \quad (1)$$

$$(\rho \cup \sigma)^\infty \subseteq (\rho \circ \sigma)^\infty \quad (2)$$

Dari (1) & (2) terbukti $\rho \vee \sigma = (\rho \circ \sigma)^\infty$

Akibat 5. [5]
Jika ρ dan σ ekuivalen pada semigrup S (kongruen pada semigrup S) dan $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ maka $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$

Bukti:
Karena $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ dan operasi $\circ$ assosiatif diperoleh ($\forall$ n$\in$ N) didapat $(\rho \circ \sigma)^n = (\rho \circ \sigma)$ sehingga $(\rho \circ \sigma)^{\infty} = (\rho \circ \sigma)$. Terbukti $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$.

Teorema 6. [1].
Jika M sublattice dari lattice (K(S) ; $\vee$, $\wedge$) dan ($\forall$ ρ, $\sigma \in$ M) $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ maka M modular

Bukti:
Berdasarkan Teorema 3, (K(S); $\vee$, $\wedge$) merupakan lattice dengan $(\rho \vee \sigma) = (\rho \cup \sigma)^s$ dan $\rho \wedge \sigma = \rho \cap \sigma$ ($\forall$ $\rho, \sigma \in$ K(S)), ditulis (K(S); $\vee$, $\cap$).

Ambil sebarang $\alpha, \beta, \gamma \in$ M dan $\alpha \leq \gamma$. Karena $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ dan berdasarkan Akibat 5 diperoleh $\alpha \vee \beta = \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. $(x, y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (x, y) \in (\alpha \vee \beta) \cap \gamma \Leftrightarrow (x, y) \in \gamma$ dan ($\exists$ z $\in$ S) sehingga $(x, z) \in \alpha$ dan $(z, y) \in \beta$. Karena $\alpha \leq \gamma$, diperoleh $(x, z) \in \Leftrightarrow (x, z) \in \gamma$

Jadi $(z, x) \in \gamma$ dan $(x, y) \in \gamma$ akibatnya $(z, y) \in \gamma$. $(z, y) \in \gamma$ dan $(x, y) \in \gamma \Rightarrow (z, y) \in \beta \cap \gamma$ sehingga $(x, y) = (x, z) \circ (z, y) \in \alpha \circ (\beta \cap \gamma) = \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Terbukti ($\forall$ $\alpha, \beta, \gamma \in$ M) dan $\alpha \leq \gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \leq \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. yaitu sublattice M bersifat modular.

3. Kesimpulan

Himpunan semua kongruen pada semigrup S (K(S)) membentuk lattice dengan operasi biner $\vee$ dan $\wedge$ didefinisikan sebagai $\rho \vee \sigma = (\rho \cup \sigma)^s$ dan $(\rho \wedge \sigma) = (\rho \cap \sigma)$ ($\forall$ $\rho, \sigma \in$ K(S)) yang disebut lattice kongruen pada semigrup S dan ditulis (K(S); $\vee$, $\cap$)

Lattice kongruen pada semigrup S (K(S); $\vee$, $\cap$) bersifat modular, yaitu $\alpha \leq \gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \leq \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$, ($\forall$ $\alpha, \beta, \gamma \in$ K(S)),

4. Daftar Pustaka

[1] Spitznagel. C.R, *Congruence Lattices*., **2000**. http://www.jcu.edu/ math.pdf . pp. 1 - 4.
[2] Chajda.I. and Glazek. K., *A Basic Course On General Algebra*, **1999**, Technical University Press. Poland.
[3] Spitznagel. C.R, *Structure in Semigroup II*, **1997**, Seminar Notes.
[4] Denecke.K., Wismath. S.L., *Universal Algebra and Aplications in Theoretical Computer Science*, **2002**, Chapman & Hall/CRC., Washington D.C.
[5] Howie. J.M., *An Introduction to Semigroup Theory*. **1976**, Academic Press. London.